bejövő színre (spinre) átlagolunk, a kimenőre összegezünk

$$d\sigma = \frac{1}{3}\sum_{ii'}\frac{1}{3}\sum_{jj'}\cancel{\frac{1}{2}\sum_{ss'}}\cancel{\frac{1}{2}\sum_{rr'}}\left(\frac{g^2}{(p-p')^2}\right)^2(4m\mu)^2\cancel{\delta_{rr'}\delta_{ss'}}\, t^a_{ii'}\, t^a_{jj'}\, t^{b*}_{ii'}\, t^{b*}_{jj'}$$

$$\frac{1}{3}\sum_{ii'} t^a_{ii'}\, t^{b*}_{ii'} = \frac{1}{3}\sum_{ii'} t^a_{i'i}\, t^b_{ii'} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\, t^a t^b = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\delta_{ab}$$

$$d\sigma = \frac{1}{36}\underbrace{\delta^{ab}\delta^{ab}}_{\underbrace{\delta^{aa}}_{=8}}\left(\frac{g^2}{q^2}\right)^2(4m\mu)^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{g^2}{q^2}\right)^2(4m\mu)^2$$

$V_{q_1 q_2}(q) = -\frac{2}{9}g^2\frac{1}{q^2}$ ebből is Coulomb jön ki

de $\frac{2}{9}$-es színfaktorral

ha figyelembe vesszük, hogy színszinglett jön be és megy ki, akkor más jön ki a potenciálra

$$\psi_{Q_1Q_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1^{Q_1}\psi_1^{*Q_2} + \psi_2^{Q_1}\psi_2^{*Q_2} + \psi_3^{Q_1}\psi_3^{*Q_2}\right)$$

kezdőállapot nem olyan egyszerű

$t^a_{ii}\, t^a_{jj}$ kombinációban kvark-antikvarkra

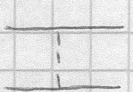
$$\frac{1}{3}t^a_{ii'}\, t^{a*}_{i'i} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\, t^a t^a = \frac{1}{6}\delta^{aa} = \frac{4}{3}$$

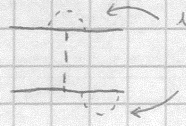
$$V_{Q_1\bar{Q}_2}(q) = \frac{4}{3}g^2\frac{1}{q^2}$$

Aszimptotikus szabadság

03.10.

QED: $V(q) = -\frac{1}{q^2}(\ )$





vertex korrekció

töltött részecske saját energiája

ezek nem adnak járulékot a potenciálba

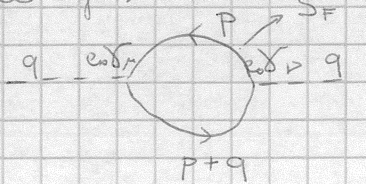
vákuum polarizáció

$V(r) = \frac{e^2}{r}d(r)$ módosul a potenciál

$$d(r) = 1 + e^2(r_0)d_1 + (e^2(r_0))^2 d_2 + \dots$$

$d(r) \leftarrow$ árnyékoló fv.

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$



$$\Pi_{\mu\nu}(q) \longrightarrow q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$$

töltésmegmaradás $\quad 0 = \partial_\mu \bar\psi \gamma^\mu \psi$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\Pi(q^2)\, q^2 \rightarrow \text{polarizációs fv.}$$

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\,\frac{1}{1-\Pi(q^2)} \leftarrow \text{így módosul}$$

$$S_F = \langle 0|T(\psi(x)\bar\psi(y))|0\rangle \Rightarrow -\frac{\not p + m}{p^2-m^2+i\varepsilon} \qquad \not p = p_\mu \gamma^\mu$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dirac indexek} \\ \text{szerint}}}{Sp_D} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\gamma_\mu \frac{\not p + \not q + m}{(p+q)^2-m^2}\,\gamma_\nu \frac{\not p + m}{p^2-m^2}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) - \Pi_{\mu\nu}(0) = *$$

$$\underbrace{\frac{1}{\not p + \not q - m}\,\frac{\not p + \not q + m}{\not p + \not q + m}}_{(p+q)^2 - m^2} \qquad \not p \not p = p^\mu p^\nu \underbrace{(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)}_{2g_{\mu\nu}}\frac{1}{2} = p^2$$

$$\frac{1}{\not p + \not q} \approx \frac{1}{\not p} + \frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p} + \frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p} + \dots \qquad m \ll q, p$$

$$* = -Sp_D \int \frac{d^4p}{(4\pi)^3}\Big(\underbrace{\gamma_\mu \frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p}\gamma_\nu\frac{1}{\not p}}_{-\frac{1}{p^6}\gamma_\mu \not p \not q \not p \gamma_\nu \not p} + \gamma_\mu \frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p}(-\not q)\frac{1}{\not p}\gamma_\nu\frac{1}{\not p}\Big) \dots =$$

ennek járuléka $\emptyset$

$\int$ páratlan fv. $= 0$

$$\not p \gamma_\nu \not p = p^\lambda p^\kappa \gamma_\lambda(-\gamma_\kappa\gamma_\nu + 2g_{\kappa\nu}) = -p^2\gamma_\nu + 2\not p\, p_\nu$$

$$\not p \not q \not p = -p^2 \not q + 2\not p (p\cdot q)$$

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = 2g_{\mu\nu}\cdot 4$$

$$\cancel{2}\, Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu) = \cancel{2}\, g_{\mu\nu}\, 4$$

$$= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{p^8}\, Sp_D(\gamma_\mu \not p \not q \not p \not q \not p \gamma_\nu \not p)$$

$$= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^8}\Big[4 g_{\mu\nu} p^2 (q^2p^2 - 2(pq)^2) - 8 p_\mu p_\nu (p^2q^2 - 4(pq)^2) -$$

$$8p^2(pq)(p_\nu q_\mu + p_\mu q_\nu)\Big]$$

rémisztő feladat : lássuk be, hogy ez $\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\Pi(q^2)$ alakú !

$$g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu} = \Pi^\nu{}_\nu = (\delta^\nu{}_\nu - 1)\Pi(q^2) = 3\Pi(q^2)$$

$$\cancel{\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_{\mu\nu}(0)}$$

$$q^2 3\left[\Pi(q^2) - \Pi(0)\right] = -e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^8}\, 8\left[p^4q^2 - 2p^2(pq)^2\right] =$$

$$= -e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{8}{p^6}\left(p^2q^2 - 2(pq)^2\right) = *$$

$p^2 = p_0^2 - \underline{p}^2$ Wick forgatás $-ip_0 = p_4$

$p_E^2 = -p_0^2 - \underline{p}^2$ Euklideszi metrika

imaginárius tengelyen int.

$$\int \frac{d^4p\, p_\mu p_\nu}{f(p^2)} = g_{\mu\nu}\frac{1}{4}\int d^4p \frac{p^2}{f(p^2)}$$

$$* = -4e_0^2 q^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^4}$$

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = -\frac{4}{3}e_0^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^4}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int p^3 dp \frac{1}{p^4}$$ → logaritmikus integrál

→ regularizálni kell

levágás

$$\int_{cq}^{\Lambda} \frac{dp}{p}$$

nagy szám

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi}$$

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\frac{1}{1 + \frac{e_0^2}{6\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\underset{=1}{c}q}} = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\frac{1}{1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{q} + \ln\frac{\Lambda}{\mu} - \ln\frac{\Lambda}{\mu}\right)} =$$

renormalizációs skála

$$= \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\frac{1}{1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\left(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \ln\frac{\mu}{q}\right)} =$$

$$= \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\frac{1}{1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}}\;\frac{}{1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\frac{\Lambda}{1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}}\ln\frac{\mu}{q}}$$

$D_{\mu\nu}^{(x,y)} = \langle 0 | T\left(A_\mu(x) A_\nu(y)\right) | 0 \rangle \rightarrow$ Fourier-transzformáltját nézzük

A_μ helyett renormalizált $A_\mu^{ren} Z_3^{1/2} = A_\mu$ térmennyiség

$$Z_3 = 1 + \frac{2\alpha_0}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}$$

$$Z_3^{-1} D_{\mu\nu}^{ren} = Z_3^{-1}\langle 0 | T\left(A_\mu(x) A_\nu(y)\right) | 0 \rangle$$

$\alpha_{ren} = \alpha_0 \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha_0}{3\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu}}$ töltés renormalizációja

1954. Abrikoszov, Landau, Halatnyikov

$\alpha_{ren} = \dots = \alpha_0 \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha_0}{3\pi}\ln\frac{r_*}{r_0}}$ → r_0 távolságon $\alpha_{ren} = \alpha_0$

→ más távolságokon más

↳ pont ilyen az árnyékolás

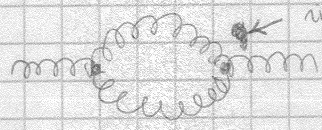
$\alpha_{ren}(*) \xrightarrow[r_0 \to 0]{} \dfrac{1}{\frac{2}{3\pi}\ln\frac{r}{r_0}} \xrightarrow[r_0 \to 0]{} 0$ elektron töltése nem pontszerű

⇒ csak az elektron Compton-hullámhossznál nagyobb távolságoknak van értelme

Béta függvény: $\left.\dfrac{d\alpha(r)}{d\ln r}\right|_{r_0} = -\dfrac{2\alpha^2(r_0)}{3\pi} = \beta_{QED}$

QCD fermionok járuléka ugyanolyan de fotonok helyett gluonok, amiknek van színtöltése

impulzussal arányos vertex



$$g^2(r_0) = \frac{g^2(r)}{1+\beta_{QCD}\, g^2(r)\ln\frac{r}{r_0}}$$

$$\beta_{QCD} = \frac{11}{6\pi}\underset{SU_c(n)}{n} - \nu\frac{2}{3\pi} = \frac{33}{6\pi} - 6\frac{4}{6\pi} = \frac{33-24}{6\pi} > 0$$

⇒ csökkenő r_0 távolsággal csökken $g^2(r_0)$

ha $g^2(r_0)$-t rögzítjük és r-rel megyünk messzire akkor antiárnyékolás ⇒ egyre nagyobb töltés ⇒ nem szakadnak el ⇒ bezárás

„infrared slavery"